Mathematischer Vorkurs
Lösungen zum Übungsblatt 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. Norbert Pietralla/Sommersemester 2012
c.v.meister@skmail.ikp.physik.tu-darmstadt.de

Aufgabe 1: Es gilt: für $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist die Ableitung gegeben durch $f'(x) = nx^{n-1}$. Man zeige mit der Quotientenregel, dass diese Regel auch für negative ganzzahlige Werte von n gilt.

Lösung: Für x^{-n} kann man auch schreiben

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \in N.$$

Die Anwendung der Quotientenregel liefert

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}$$

Aufgabe 2: Berechnen die sie Ableitungen folgender Funktionen:

$$\text{(a)} \quad f(x) = x^n \sin(x)\cos(x), \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{a+bx}{c+dx}, \quad \left(x \neq -\frac{c}{d}\right)$$

Lösung:

$$\text{(a)} \quad f'(x) = nx^{n-1}\sin(x)\cos(x) + x^n(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = x^n\left(\frac{n}{2x}\sin(2x) + \cos(2x)\right), \qquad \text{(b)} \quad f'(x) = \frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$$

Aufgabe 3: Berechnen sie die Nullstellen und Extremwerte folgender Funktionen:

$$\text{(a)} \quad y = 2x^4 - 8x^2, \qquad \text{(b)} \quad y = \sin(0.5x), \qquad \text{(c)} \quad y = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x.$$

Lösung:

(a) Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = x_4 = 0$,
Extremwerte: Minimum bei $(-\sqrt{2}, -8)$ und $(\sqrt{2}, 8)$, Maximum bei $(0, 0)$

(b) Nullstellen: $x = 2k\pi$, mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,
Extremwerte: Maxima: $x = \pm\pi,\ \pm 5\pi,\ \pm 9\pi, \ldots$, Minima: $x = \pm 3\pi,\ \pm 7\pi,\ \pm 11\pi, \ldots$,

(c) Nullstellen: $x_1 = 3(1+\sqrt{5})/2 = 4,85$, $\quad x_2 = 3(1-\sqrt{5})/2 = 1,85$, $\quad x_3 = 0$,
Extremwerte: Minimum bei $(3, -18)$ und Maximum bei (-1,10/3)

Aufgabe 4: Bestimmen sie die Extremwerte und Wendepunkte folgender Funktionen:

$$\text{(a)} \quad y = \frac{x}{x^2+1}, \qquad \text{(b)} \quad y = x\ln^2(x), \qquad \text{(c)} \quad y = x^n e^{-x}.$$

Lösung

(a) Minimum bei $x_1 = -1$, Maximum bei $x_2 = 1$, Wendepunkte bei $x_3 = -\sqrt{3}$, $x_4 = 0$, $x_5 = \sqrt{3}$.

(b) Minimum bei $x_1 = 1$, Maximum bei $x_2 = 1/e^2$, Wendepunkt bei $x_3 = 1/e$,

(c) Maximum bei $x_1 = n$, Wendepunkte bei $x_{2,3} = n \pm \sqrt{n}$; für $x = 0$ wird zwar auch die erste und zweite Ableitung null, jedoch auch die dritte etc. (hängt vom Wert von n ab) - dieser Punkt muss gesondert betrachtet werden.

Aufgabe 5: Entwickeln sie die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe. Geben sie jeweils die ersten vier Glieder dieser Reihe an:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \sqrt{1-x}, \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \ln(1+x).$$

Lösung:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2}\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2^3}\frac{x^3}{3} + \ldots \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

Aufgabe 6: Berechnen sie den im 1. Quadranten liegenden Schnittpunkt der Funktionen $f(x) = e^x - 1$ und $g(x) = 2\sin(x)$. Nähern sie beide Funktionen durch ein Näherungspolynom $p_3(x)$ 3. Grades an.

Lösung: Die Ausdrücke für die Polynome 3. Grades sind

$$f(x) = e^x - 1 \approx x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \quad \text{und} \quad g(x) = 2\sin(x) \approx 2x - \frac{x^3}{3}.$$

Den Schnittpunkt erhält man durch Gleichsetzen der beiden Polynome:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = 2x - \frac{x^3}{3}.$$

Es folgt $x^3 + x^2 - 2x = 0$. Man erhält zwei Lösungen: $x_1 = 0$ und die gesuchte, im ersten Quadranten liegende Lösung $x_2 = 1$. Der gesuchte Schnittpunkt ist somit $(1, 5/3)$.

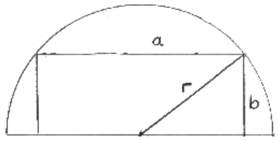
Aufgabe 7: Berechnen sie mit der Regel von l'Hospital den Grenzwert

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{e^{\lambda\tau} - 1}{3\tau}.$$

Lösung: Ableiten von Zähler und Nenner ergibt

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{e^{\lambda\tau} - 1}{3\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\lambda e^{\lambda\tau}}{3} = \frac{\lambda}{3}.$$

Aufgabe 8: Einem Halbkreis mit Radius r ist ein Rechteck einzuschreiben, dessen Flächeninhalt möglichst groß sein soll (siehe Abbildung). Wie groß müssen die Rechteckseiten a und b sein?



Lösung:
Die Fläche des Rechtecks berechnet sich aus $A = ab$. Aus der Zeichnung folgt:

$$\frac{a^2}{4} + b^2 = r^2.$$

Daraus folgt

$$b = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Für die Fläche erhält man damit einen Ausdruck, der nur von a abhängt:

$$A = a\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Damit die Fläche maximal wird, muss man die erste Ableitung von $A(a)$ bilden und prüfen, wann diese gleich null wird. Bei Anwendung der Produktregel folgt

$$A'(a) = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}\frac{(-a)}{2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} - \frac{a^2}{4}\frac{1}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}.$$

Aus der Bedingung für das Extremum $A'(a) = 0$ erhält man

$$\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} - \frac{a^2}{4}\frac{1}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = 0.$$

Nach Multiplikation mit $\sqrt{r^2 - a^2/4}$ folgt

$$r^2 = \frac{a^2}{2}, \quad \text{d.h.} \quad a = \sqrt{2}r.$$

Damit hat man die Bedingung für die eine Seite des Rechtecks. Die Bedingung für die andere Seite ergibt sich aus der oben aufgestellten Relation zwischen a, b und r, also

$$b = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}r.$$

Aufgabe 9: Bilden sie die partiellen Ableitungen nach x und y von folgenden Funktionen:

(a) $f(x,y) = x^2\sqrt{1-y^2}$, (b) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, (c) $f(x,y) = \sin(axy^2)$.

Lösung:

(a) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\sqrt{1-y^2}, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{x^2 y}{\sqrt{1-y^2}}$$

(b) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x\exp(x^2+y^2), \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y\exp(x^2+y^2)$$

(c) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = ay^2\cos(axy^2), \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2axy\cos(axy^2)$$