# Mathematischer Vorkurs
# Lösungen zum Übungsblatt 3

**Prof. Dr. Norbert Pietralla/Sommersemester 2012**
c.v.meister@skmail.ikp.physik.tu-darmstadt.de

**Aufgabe 1:** Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\pi/2} 3\cos(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \quad \int_0^{\pi} 3\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

$$\text{(a)} \quad [3\sin(x)]_0^{\pi/2} = 3, \qquad \text{(b)} \quad [3\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 6, \qquad \text{(c)} \quad [3\sin(x)]_0^{\pi} = 0.$$

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie den Betrag der Fläche zwischen Graph und $x$-Achse:

$$\text{(a)} \quad \int_{-2}^{0} x - 2\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^4 x - 2\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

(a) Der Integrand besitzt im angegebenen Integrationsintervall keine Nullstelle:

$$\int_{-2}^{0} x - 2\,\mathrm{d}x = \left[x^2/2 - 2x\right]_{-2}^{0} = -6.$$

Die geometrische Bedeutung des Integrals ist die gerichtete Fläche, es können also auch negative Werte auftreten. Der Betrag der Fläche ist $A = 6$.

(b) Der Integrand besitzt im angegebenen Integrationsintervall eine Nullstelle bei $x = 2$. Deshalb sind die Integrale in den Intervallen $0 \leq x \leq 2$ und $2 \leq x \leq 4$ getrennt zu berechnen. Die Summe der Beträge der Teillösungen ergibt die Gesamtfläche $A = 4$.

**Aufgabe 3:** Berechnen Sie den Inhalt der Flächen, die von den Kurven mit den angegebenen Gleichungen eingeschlossen werden:

$$\text{(a)}\quad f_1(x) = x^3 + 7,\quad f_2(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5,\qquad \text{(b)}\quad y_1 = \frac{1}{x},\quad 3y_1 + 3x = 10,$$
$$\text{(c)}\quad y_1 = \cos(x),\quad y_2 = \sin(x)\quad \text{zwischen benachbarten Schnittpunkten.}$$

Lösung: Man berechnet die beiden Schnittpunkte $x_1$ und $x_2$ der Kurven. Zwischen den beiden Schnittpunkten muss man die Fläche unter $f_1(x)$ von der unter $f_2(x)$ subtrahieren, also

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - f_1(x)]\, \mathrm{d}x \right|.$$

(a) Schnittpunktabszissen: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\Rightarrow A = 1/6$.
(b) Schnittpunktabszissen: $x_1 = 3$, $x_2 = 1/3$, $\Rightarrow A = 40/9 - 2\ln(3)$.
(a) Schnittpunktabszissen: $x_1 = \pi/4$, $x_2 = 5\pi/4$, $\Rightarrow A = 2\sqrt{2}$.

**Aufgabe 4:** Berechnen Sie die Integrale:

$$\text{(a)}\ \int \cos(ax)\,\mathrm{d}x,\qquad \text{(b)}\ \int 2\pi\sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x,\qquad \text{(c)}\ \int 2ax\,\mathrm{d}t,\qquad \text{(d)}\ \int \sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,\qquad \text{(e)}\ \int x^{7/3} + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

(a) $(\sin(ax))/a + C$

(b) $-\cos(2\pi x) + C$

(c) $2axt + C$

(d) Mit $\sin\alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/(2i)$ folgt

$$\begin{aligned}
\int \sin^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha &= \int -\frac{1}{4}e^{2i\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2i\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{1}{8i}e^{2i\alpha} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{8i}e^{-2i\alpha} + C \\
&= \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2i}\left(e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha}\right)\right) + C = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin(2\alpha) + C \\
&= \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + C
\end{aligned}$$

(e) $3x^{10/3}/10 + \ln|x|$

**Aufgabe 5:** Lösen Sie mittels partieller Integration:

$$\text{(a)} \quad \int x^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Die Formel für die partielle Integration lautet

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Man wählt $x^2 = u$, $\cos(x) = v'$ und berechnet

$$\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x = x^2\sin(x) - \int 2x\sin(x)\,\mathrm{d}x = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C.$$

(b) Hier ist $\sin(x) = u$, $\cos(x) = v'$. Es folgt

$$\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Nach Umformen erhält man

$$2\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2(x)$$

**Aufgabe 6:** Lösen Sie durch Substitution:

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 (5x-4)^3\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{7-3x}}, \qquad \text{(c)} \quad \int_1^{3/2} \sin\left(\pi x + \frac{5\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(d)} \quad \int_{-1}^{+1} x^2\sqrt{2x^3+4}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

(a) Substitution: $5x - 4 = u$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/5$

$$\int_0^1 (5x-4)^3 dx = \int_{-4}^{1} \frac{u^3}{5}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^4}{20}\right]_{-4}^{1} = -\frac{51}{4}.$$

(b) Substitution: $u = 7 - 3x$, $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/3$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{7-3x}} = \int_4^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{3}\right) = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{u}\right]_1^4 = \frac{2}{3}.$$

(c) Substitution: $u = \pi x + \frac{5\pi}{2}$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/\pi$,

$$\int_1^{3/2} \sin\left(\pi x + \frac{5\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{7\pi/2}^{4\pi} \sin(u)\frac{\mathrm{d}u}{\pi} = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(u)\right]_{7\pi/2}^{4\pi} = -\frac{1}{\pi}.$$

(d) Substitution: $u = 2x^3 + 4$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/(6x^2)$,

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{2x^3+4}\,\mathrm{d}x = \int_2^6 x^2\sqrt{u}\frac{1}{6x^2}\,\mathrm{d}u = \int_2^6 \frac{\sqrt{u}}{6}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{9}u^{3/2}\right]_2^6 = \frac{2\sqrt{3}}{9}(3\sqrt{3}-1).$$

**Aufgabe 7:** Lösen Sie folgende uneigentlichen Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^3}, \qquad \text{(c)} \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = [\ln\lambda]_1^\infty = \infty. \quad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^3} = \lim_{b\to\infty}\left(\left[\frac{-1}{2r^2}\right]_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right) = \infty.$$

**Aufgabe 8:** Welche der folgenden Differentialgleichungen gehören zur Klasse der linearen Differentialgleichungen 1. oder 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten?

$$\text{(a)} \quad y' + x^2 y = 2x, \qquad \text{(b)} \quad 5y'' - 2y' - 4x = 3y, \qquad \text{(c)} \quad y^{(4)} + 2y'' + 3y' = 0,$$

$$\text{(d)} \quad \sin(x)\cdot y'' - y = 0, \qquad \text{(e)} \quad y'' - x^5 = 2, \qquad \text{(f)} \quad 2y'' - y' + \frac{3}{2}y = 0.$$

Lösung: Lineare Differentialgleichungen 1. oder 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind: (b), (e), (f).

**Aufgabe 9:** Bestimmen Sie Typ (homogen - inhomogen) und Ordnung der folgenden Differentialgleichungen:

$$\text{(a)} \quad y'' + ax = 0, \qquad \text{(b)} \quad \frac{5}{4}y'' + \frac{2}{3}y' = \frac{1}{2}y, \qquad \text{(c)} \quad 2y' = 3y, \qquad \text{(d)} \quad \frac{3}{10}y'' + \frac{2}{5}y' + \frac{1}{6}y - \sin(x) = 0.$$

Lösung:

(a) inhomogen, 2. Ordnung

(b) homogen, 2. Ordnung

(c) homogen, 1. Ordnung

(d) inhomogen, 2. Ordnung

**Aufgabe 10:** Die Differentialgleichung

$$\frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}y = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^{2x}.$$

Bestimmen Sie die Konstante $C$ für die folgenden Randbedingungen:

$$\text{(a)} \quad y(0) = 0, \qquad \text{(b)} \quad y(0) = -2, \qquad \text{(c)} \quad y(-1) = 1, \qquad \text{(d)} \quad y'(-1) = 2e^{-2}.$$

Lösung: Man setzt in dem vorgegebenen Lösungsansatz $y(x) = Ce^{2x}$ den in der jeweiligen Randbedingung angegebenen Wert ein und kann damit $C$ bestimmen bzw. die allgemeine Form der Lösung der DGL.

(a) $C = 0$ bzw. $y(x) = 0$

(b) $C = -2$ bzw. $y(x) = -2e^{2x}$

(c) $C = e^2$ bzw. $y(x) = e^{2x+2}$

(d) $C = 1$ bzw. $y(x) = e^{2x}$

**Aufgabe 11:** Geben Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen 1. Ordnung an:

$$\text{(a)} \quad 2y' + 8y = 0, \qquad \text{(b)} \quad \frac{1}{5}y' = 6y.$$

Lösung:

$$\text{(a)} \quad y(x) = Ce^{-4x}, \qquad \text{(b)} \quad y(x) = Ce^{30x}$$

**Aufgabe 12:** Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe des Exponentialansatzes und geben Sie die allgemeine Lösung an:

$$2y'' - 12y' + 10y = 0.$$

Lösung:
Allgemeiner Ansatz: $y = e^{rx}$.
Charakteristisches Polynom: $2r^2 - 12r + 10 = 0$.
Lösung dieser quadratischen Gleichung: $r_1 = 5$, $r_2 = 1$.
Somit ergibt sich die allgemeine Lösung der DGL

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{5x} + C_2 e^{x}.$$

**Aufgabe 13:** Geben Sie die allgemeinen Lösungen der inhomogenen Differentialgleichungen an:

$$\text{(a)} \quad 7y'' - 4y' - 3y = 6, \qquad \text{(b)} \quad y'' - 10y' + 9y = 9x.$$

Lösung: Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und einer speziellen Lösung der DGL.

(a) Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL lautet: $y_{inh} = -2$.

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist $y_{hom} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x/7}$

Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x/7} - 2.$$

(b) Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL lautet: $y_{inh} = x + 10/9$.

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist $y_{hom} = C_1 e^{9x} + C_2 e^{x}$

Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(x) = C_1 e^{9x} + C_2 e^{x} + x + \frac{10}{9}.$$

**Aufgabe 14:** Zur folgenden Differentialgleichung sei eine spezielle Lösung $u(x)$ angegeben. Überprüfen Sie, dass $u(x)$ tatsächlich eine Lösung der DGL ist und geben Sie die allgemeine Lösung der DGL an. Die DGL und die spezielle Lösung lauten

$$\frac{1}{2}y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = \frac{3}{4}x^2 - 1, \qquad u(x) = \frac{3}{10}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{43}{125}.$$

Lösung: Um zu überprüfen, dass $u(x)$ eine Lösung der DGL ist, bildet man die Ableitungen von $u(x)$ und setzt diese in die DGL ein:

$$u'(x) = \frac{3}{5}x + \frac{18}{25}, \quad u''(x) = \frac{3}{5}.$$

Nach dem Einsetzen findet man

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} - 3\left(\frac{3}{5}x + \frac{18}{25}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{3}{10}x^2 + \frac{18}{25} + \frac{43}{125}\right) = \frac{3}{10} - \frac{9}{5}x - \frac{54}{25} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{43}{50} = \frac{3}{4}x^2 - 1.$$

Die linke und die rechte Seite der letzten Gleichung sind äquivalent, d.h. $u(x)$ ist eine spezielle Lösung der DGL.
Um die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zu bestimmen braucht man noch die allgemeine Lösung der homogenen DGL. Mit dem Exponentialansatz $y(x) = \exp(rx)$ findet man nach Einsetzen in die homogene DGL

$$\frac{r^2}{2} - 3r + \frac{5}{2} = 0.$$

Die Lösungen sind $r_1 = 5$ und $r_2 = 1$. Damit gilt $y_{hom}(x) = C_1e^{5x} + C_2e^x$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y(x) = C_1e^{5x} + C_2e^x + \frac{3}{10}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{43}{125}.$$

**Aufgabe 15:** Geben Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

(a) $\frac{1}{2}y' + 2y = 0$, Randbedingung: $y(0) = 3$, (b) $\frac{4}{7}y' - \frac{6}{5}y = 0$, Randbedingung: $y(10) = 1$.

Lösung:

(a) Die allgemeine Lösung der DGL lautet $y = Ce^{-4x}$. Aus der Randbedingung folgt: $y(0) = Ce^0 = C = 3$. Somit ist das Ergebnis

$$y = 3e^{-4x}.$$

(b) Die allgemeine Lösung der DGL lautet $y = Ce^{21x/10}$. Aus der Randbedingung folgt: $y(10) = Ce^{21} = 1$, also $C = e^{-21}$. Somit ist das Ergebnis

$$y = e^{-21}e^{21x/10}.$$

**Aufgabe 16:** Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung:

$$y'' + y = 2y', \quad \text{Randbedingungen: } y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Lösung: Mit dem Lösungsansatz $y = e^{rx}$ folgt $r^2 - 2r + 1 = 0$, also ist $r = 1$ (Doppelwurzel). Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Es müssen noch die angegebenen Randbedingungen berücksichtigt werden, d.h.

$$C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 = 1 \quad \text{und} \quad C_1 e^1 + C_2 \cdot 1 \cdot e^1 = 0.$$

Daraus folgt $C_1 = 1$ und $C_2 = -1$. Damit ist die Lösung der DGL

$$y = e^x - x e^x.$$

**Aufgabe 17:** Lösen Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\text{(a)} \quad y'' = 1 + y'^2, \qquad \text{(b)} \quad y'' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Hinweis: Benutzen Sie im Fall (a) die Substitution $z = y'$.

Lösung:

(a) Nach Substitution von $z = y'$ folgt aus der DGL: $z' = 1 + z^2$, also

$$\frac{dz}{1 + z^2} = dx \quad \text{mit der Lösung} \quad \arctan(z) = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad z = \tan(x + C_1).$$

Nach Ausdrücken von $z$ durch $y'$ ergibt sich:

$$y' = \tan(x + C_1) \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int \tan(x + C_1)\, dx$$

Damit ist die Lösung der DGL

$$y = -\ln|\cos(x + C_1)| + C_2.$$

(b) Die DGL kann man umschreiben in

$$d(y') = \frac{dx}{1 + x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \arctan(x) + C_1$$

Nun $y'$ durch $dy/dx$ ersetzen und partiell integrieren:

$$dy = dx[\arctan(x) + C_1]$$
$$y = \int \arctan(x)\, dx \; + C_1 x + C = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1 + x^2}\, dx + C_1 x + C$$

Das verbliebene Integral logarithmisch integrieren:

$$y = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_1 x + C_2.$$