Mathematischer Vorkurs
Lösungen zum Übungsblatt 5

Prof. Dr. Norbert Pietralla/Sommersemester 2012
c.v.meister@skmail.ikp.physik.tu-darmstadt.de

Aufgabe 1: Berechnen Sie den Abstand $|\vec{d}\,|$ der Punkte P_1 und P_2:

$$\text{(a)} \quad P_1 = (3,2,0), \quad P_2 = (-1,4,2), \qquad \text{(b)} \quad P_1 = (-2,-1,3), \quad P_2 = (4,-2,-1).$$

Lösung:

$$\text{(a)} \quad |\vec{d}\,| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}, \qquad \text{(b)} \quad |\vec{d}\,| = \sqrt{53}.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie den von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel.

$$\text{(a)} \quad \vec{a} = (1,-1,1), \quad \vec{b} = (-1,1,-1), \qquad \text{(b)} \quad \vec{a} = (-2,2,-1), \quad \vec{b} = (0,3,0).$$

Lösung: Allgemein gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|}.$$

(a) $|\vec{a}\,| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}\,| = \sqrt{3}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -3 \Rightarrow \cos(\alpha) = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$, somit gilt $\vec{a} = -\vec{b}$.

(b) $|\vec{a}\,| = 3$, $|\vec{b}\,| = 3$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 \Rightarrow \cos(\alpha) = 2/3 \Rightarrow \alpha = 48^\circ 12'$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie $|\vec{a}\times\vec{b}\,|$:

$$\text{(a)} \quad |\vec{a}\,| = 2, \quad |\vec{b}\,| = 3, \quad \alpha = (\vec{a},\vec{b}) = 60^o, \qquad \text{(b)} \quad |\vec{a}\,| = \frac{1}{2}, \quad |\vec{b}\,| = 4, \quad \alpha = (\vec{a},\vec{b}) = 0^o.$$

Lösung:

$$\text{(a)} \quad |\vec{a}\times\vec{b}\,| = |\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|\cdot\sin(\alpha) = 6\sqrt{3}/2 = 5,19, \qquad \text{(b)} \quad |\vec{a}\times\vec{b}\,| = 0.$$

Aufgabe 4: Welche dritte Koordinate x muss der Punkt $P_1(2,1,x)$ haben, damit er mit den Punkten $P_2(1,1,2)$, $P_3(-1,-1,4)$ und $P_4(2,-2,9)$ in einer Ebene liegt?

Lösung: Man kann die Gleichung der Ebene mit den drei bekannten Punkten aufstellen:

$$E:\ \vec{x} = (1,1,2) + \lambda(1,1,-1) + \mu(-1,3,-7).$$

Durch Gleichsetzen der Ebenengleichung mit dem Ortsvektor des unbekannten Punktes erhält man ein Gleichungssystem bestehend aus drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Hieraus kann man dann auf den gesuchten Wert x schließen. Man geht also aus von

$$(1,1,2) + \lambda(1,1,-1) + \mu(-1,3,-7) = (2,1,x)$$

und erhält nach Umformung drei Gleichungen:

$$\lambda - \mu = 1, \quad \lambda + 3\mu = 0, \quad \text{und} \quad -\lambda - 7\mu = x - 2.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $\lambda = 3/4$ und $\mu = -1/4$. Setzt man diese Werte in die dritte Gleichung ein, ergibt sich $x = 3$.

Aufgabe 5: Untersuchen Sie, ob die Punkte (-11,11,-14) und (1,5,15) auf der Geraden $g:\ \vec{x} = (-5,7,6) + \lambda(3,-2,10)$ liegen.

Lösung: Man muss die Geradengleichung mit dem Ortsvektor des jeweiligen Punktes gleichsetzen.

- Erster Punkt: $(-11,11,-14) = (-5,7,6) + \lambda(3,-2,10)$. Man erhält drei Gleichungen mit einer Unbekannten λ. Alle drei Gleichungen ergeben $\lambda = -2$, d.h. der Punkt (-11,11,14) liegt auf der Geraden.
- Zweiter Punkt: $(1,5,15) = (-5,7,6) + \lambda(3,-2,10)$. Man hat drei Gleichungen, aus denen verschiedene Werte für λ folgen, d.h. der Punkt (1,5,15) liegt nicht auf der Geraden.

Aufgabe 6: Untersuchen Sie, ob sich die Geraden schneiden und geben Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an:

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} & g_1:\ \vec{x} = (1,1,1) + \lambda(2,-1,3) & \text{und} & g_2:\ \vec{x} = (1,-1,-1) + \mu(-1,1,1), \\ \text{(b)} & g_1:\ \vec{x} = (1,1,1) + \lambda(2,-1,3) & \text{und} & g_2:\ \vec{x} = (1,-1,-1) + \mu(1,-1,1). \end{array}$$

Lösung: Bei Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen erhält man drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Falls das Gleichungssystem eine Lösung besitzt, schneiden sich die beiden Geraden.

(a) $(1,1,1) + \lambda(2,-1,3) = (1,-1,-1) + \mu(-1,1,1)$.

Aus den ersten beiden Gleichungen erhält man Werte für λ und μ, die bei Einsetzen in die dritte Gleichung zu einem Widerspruch führen. Die beiden Geraden schneiden sich also nicht.

(b) $(1,1,1) + \lambda(2,-1,3) = (1,-1,-1) + \mu(1,-1,1)$.

Hier erhält man aus den beiden ersten Gleichungen $\lambda = -2$ und $\mu = -4$. Ein Einsetzen der Werte in die dritte Gleichung führt zu keinem Widerspruch, d.h. die beiden Geraden schneiden sich. Ein Einsetzen von λ bzw. μ in die jeweilige Geradengleichung liefert den Schnittpunkt (-3,3,-5).

Aufgabe 7: Bestimmen Sie die Gleichungen der folgenden Ebenen:

(a) E_1 durch den Punkt $(0,1,2)$ und in Richtung der Vektoren $\vec{v} = (0,2,1)$ und $\vec{w} = (2,3,-5)$,

(b) E_2 durch die Punkte $(0,1,2)$, $(2,-3,4)$ und $(7,-9,-1)$,

(c) E_3 durch den Punkt $(0,1,2)$, E_3 besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = (0,2,1)$.

Lösung:

(a) $E: \ \vec{x} = (0,1,2) + \lambda(0,2,1) + \mu(2,3,-5)$.

(b) $E: \ \vec{x} = (0,1,2) + \lambda(0-2, 1-(-3), 2-4) + \mu(0-7, 1-(-9), 2-(-1)) = (0,1,2) + \lambda(-2,4,-2) + \mu(-7,10,3)$

(c) Allgemein gilt: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$.

Die Koeffizienten a_i werden durch die Komponenten des Normalenvektors angegeben, man erhält

$$3x_2 + x_3 = c.$$

Da der Punkt (0,1,2) in der Ebene liegt, kann man durch Einsetzen von dessen Ortskoordinaten in die letzte Gleichung den Wert von c eindeutig bestimmen: $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = c \Rightarrow c = 4$ Daraus folgt das Ergebnis

$$E: \ 2x_2 + x_3 = 4.$$

Aufgabe 8: Untersuchen Sie, ob die Punkte $(1,3,-6)$ und $(5,-5,4)$ auf der folgenden Ebene liegen:

$$E: \ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1.$$

Lösung: In der angegebenen Darstellung der Ebenengleichung kann man sehr leicht prüfen, ob ein bestimmter Punkt in der Ebene liegt. Man muss nur die Ortskoordinaten des Punktes in die Ebenengleichung einsetzen und überprüfen, ob die Gleichung erfüllt ist.

- Erster Punkt: $2 \cdot 1 + 3 - (-6) = 11 \neq 1$. Der Punkt liegt nicht in der angegebenen Ebene.
- Zweiter Punkt: $2 \cdot 5 + (-5) - 4 = 1$. Die Ebenengleichung ist erfüllt. Der Punkt liegt in der Ebene.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Lage der folgenden Geraden zur Ebene $E:\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$:

(a) $g_1:\ \vec{x} = (1,1,1) + \lambda(-2,3,1)$, (b) $g_2:\ \vec{x} = (-1,1,1) + \lambda(-1,-1,1)$, (c) $g_3:\ \vec{x} = (3,-2,0) + \lambda(-1,-1,1)$.

Lösung: Zunächst überprüft man, ob der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene aufeinander senkrecht stehen. Ist das der Fall, so weiß man, dass die Gerade entweder parallel zur Ebene verläuft oder in der Ebene enthalten ist. Dies bekommt man dadurch heraus, dass man die einzelnen "Komponenten" der Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzt.
Führt dies zu einem Widerspruch, so gibt es keine Punkte, die sowohl auf der Geraden als auch in der Ebene liegen - die Gerade verläuft parallel zur Ebene.
Ist die Gerade in der Ebene enthalten, so gibt es unendlich viele gemeinsame Punkte. Man bekommt beim Einsetzen ein Ergebnis der Form $0 = 0$.
Sind der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden nicht aufeinander senkrecht, dann gibt es einen Schnittpunkt.

(a) Der Normalenvektor der Ebene (4,-3,1) und der Richtungsvektor der Geraden (-2,3,1) stehen nicht aufeinander senkrecht (d.h. das Skalarprodukt ist ungleich Null). Es gibt also einen Schnittpunkt

$$4 \cdot (1 - 2\lambda) - 3 \cdot (1 + 3\lambda) + (1 + \lambda) = 18.$$

Also $-16\lambda = 16 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$. Das Einsetzen von $\lambda = -1$ in die Geradengleichung liefert die Schnittpunktkoordinaten: (3,-2,0).

(b) und (c): Das Skalarprodukt von Normalenvektor der Ebene und Richtungsvektor der Geraden ist gleich Null, d.h. die Geraden sind entweder parallel zur Ebene oder liegen in der Ebene. Dies untersucht man durch "Einsetzen" der Geradengleichung in die Ebenengleichung.

(b) $4 \cdot (-1 - \lambda) - 3 \cdot (1 - \lambda) + 1 + \lambda = 18 \ \Rightarrow\ -6 = 18$. Das ist eine falsche Aussage, d.h. es gibt keine Punkte, die sowohl auf der Geraden als auch in der Ebene liegen, d.h. die Gerade verläuft parallel zur Ebene.

(c) $4\cdot(3-\lambda) - 3\cdot(-2-\lambda) + \lambda = 18$, d.h. $0 = 0$. Das ist eine wahre Aussage, d.h. es gibt unendlich viele gemeinsame Punkte. Die Gerade liegt also in der Ebene.

Aufgabe 10: Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen $E_1:\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ und $E_2:\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$.

Lösung: Der Richtungsvektor der Schnittgeraden muss zu den Normalenvektoren beider Ebenen senkrecht sein.
Man setze den Normalenvektor allgemein als (a, b, c) an. Das Skalarprodukt mit den Normalenvektoren der Ebenen muss jeweils Null ergeben:

$$(2,1,-1) \cdot (a,b,c) = 0, \quad (-1,3,-2) \cdot (a,b,c) = 0.$$

Ausmultipliziert folgt

$$2a + b - c = 0, \quad -a + 3b - 2c = 0.$$

Multipliziere die zweite Gleichung mit zwei und addiere sie zur ersten: $7b - 5c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 5c/7$.
Die erste Gleichung lässt sich umformen in $a = (c - b)/2$. Das Einsetzen des Ergebnisses für b führt zu $a = c/7$. Um ganze Zahlen für die Komponenten des Vektors zu erhalten, wählt man $c = 7$. Letztendlich folgt für den Richtungsvektor der Schnittgeraden (1,5,7).
Jetzt muss man noch einen Punkt finden, der in beidenen Ebenen liegt. Hierzu kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_1 = 0$ ist. Aus der ersten Ebenengleichung folgt die neue Gleichung $x_2 - x_3 = -1$. Aus der zweiten Ebenengleichung erhält man $3x_2 - 2x_3 = 4$. Die erste neue Gleichung lässt sich umformen zu $x_2 = -1 + x_3$. Nach Einsetzen in die zweite neue Gleichung erhält man $x_3 = 7$. Dann ist $x_2 = 6$. Damit hat man einen Punkt gefunden, der in beiden Ebenen enthalten ist: (0,6,7).
Damit ist die Schnittgerade eindeutig festgelegt:

$$\vec{x} = (0,6,7) + \lambda(1,5,7).$$

Aufgabe 11: Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ mit:

$$\text{(a)} \quad \vec{a} = (2,3,1), \quad \vec{b} = (-1,2,4), \qquad \text{(b)} \quad \vec{a} = (-2,1,0), \quad \vec{b} = (1,4,3).$$

Lösung: Es ist $\vec{c} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$. Damit ergibt sich

$$(a) \quad \vec{c} = (10,-9,7) \quad \text{und} \quad \text{(b)} \quad \vec{c} = (3,6,-9).$$

Aufgabe 12: Berechnen Sie den Gradienten folgender Skalarfelder:

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (b) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$, (c) $f(x,y,z) = a$, (c) $f(x,y,z) = x\ln(y) - z\ln(x)$.

Lösung:

(a) $\operatorname{grad} f = -(x,y,0)/(x^2+y^2)^{3/2}$,

(b) $\operatorname{grad} f = 2(x+y+z)(1,1,1)$,

(c) $\operatorname{grad} f = (0,0,0)$,

(d) $\operatorname{grad} f = (\ln\ y - x/z, x/y, -\ln\ x)$.

Aufgabe 13: Berechnen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder:

$$\text{(a)} \quad \vec{F} = (xe^{-y}, ye^{-x}), \qquad \text{(b)} \quad \vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y).$$

Lösung:

$$\text{(a)} \quad \operatorname{div}\vec{F} = e^{-y} + e^{-x}, \qquad \text{(b)} \quad \operatorname{div}\vec{F} = 0.$$

Aufgabe 14: Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y) = (xy^2,\ x^2y - 4y).$$

An welchen Punkten der xy-Ebene ist die Divergenz dieses Vektorfeldes Null?

Lösung: Berechnet man die Divergenz des gegebenen Vektorfeldes, so erhält man

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - 4y) = y^2 + x^2 - 4.$$

Soll nun die Divergenz Null sein, wie in der Aufgabenstellung verlangt, so muss gelten

$$y^2 + x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Hierbei handelt es sich um die Gleichung eines Kreises. Die Divergenz des gegebenen Vektorfeldes verschwindet also entlang eines Kreises mit dem Radius $r = 2$.

Aufgabe 15: Berechnen Sie von den Vektorfeldern $\vec{F}$ die Divergenz. Geben Sie an, wo Quellen und Senken liegen, bzw. wo das Feld quellen- und senkenfrei ist.

$$\text{(a)}\quad \vec{F}(x,y,z)=(x-a,y,z),\qquad \text{(b)}\quad \vec{F}(x,y,z)=(a,-x,z^2).$$

Lösung:

(a) $\operatorname{div}\vec{F}=3$. Jeder Punkt des Raumes stellt eine Quelle dar.

(b) $\operatorname{div}\vec{F}=2z$. Die Ebene $z=0$ ist quellen- und senkenfrei. Im Raum unter dieser Ebene ist jeder Punkt eine Senke, oberhalb eine Quelle.

Aufgabe 16: Sind die Vektorfelder wirbelfrei?

$$\text{(a)}\quad \vec{F}(x,y,z)=(a,x,b),\qquad \text{(b)}\quad \vec{F}(x,y,z)=\frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Lösung:

(a) $\operatorname{rot}\vec{F}=(0,0,1)$. Das ist ein Wirbelfeld.

(b) $\operatorname{rot}\vec{F}=(0,0,0)$. Das Feld ist wirbelfrei.

Aufgabe 17: Berechnen Sie $\vec{a}=\vec{\nabla}f$, sowie $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ (also Δf) mit $f(x,y,z)=x\cdot\sin(yz)$.

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\sin(yz),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=xz\cdot\cos(yz),\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=xy\cdot\cos(yz).$$

Daraus folgt $\vec{a}=\vec{\nabla}f=(\sin(yz),xz\cdot\cos(yz),xy\cdot\cos(yz))$.
Die Divergenz von $\vec{a}$ ist

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{a}&=\frac{\partial f}{\partial x}\sin(yz)+\frac{\partial f}{\partial y}[xz\cdot\cos(yz)]+\frac{\partial f}{\partial z}[xy\cdot\cos(yz)]\\&=-xz^2\sin(yz)-xy^2\sin(yz)=-x(x^2+y^2)\sin(yz).\end{aligned}$$

Aufgabe 18: Berechnen Sie die Divergenz des Gravitationsfeldes der Erde, welches gegeben ist durch

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Lösung: Das Gravitationsgesetz wird im Rahmen der Physik I-Vorlesung noch ausführlich diskutiert werden. Es sind γ die Gravitationskonstante, M die Erdmasse, m die Masse des betrachteten Körpers im Gravitationsfeld der Erde und r dessen Abstand vom Erdmittelpunkt. Da γ, M und m hier Konstanten sind, kann man sie zu einer neuen Konstanten b zusammenfassen. Zu dieser Konstanten fügt man auch noch das Minuszeichen hinzu, also $b = -\gamma mM$.
Man betrachtet somit ein Feld der Form

$$\vec{F} = \frac{b}{r^3}\vec{r} = \frac{b}{r^3}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \quad \text{mit} \quad r \neq 0.$$

Damit wird

$$\operatorname{div}\vec{F} = b\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right].$$

Betrachtung der einzelnen Komponenten

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^6}\left(r^3 - x \cdot 3r^2\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}.$$

Hierbei wurde verwendet, dass

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}.$$

Damit folgt

$$\operatorname{div}\vec{F} = b\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2)\right] = b\left[\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5}\right] = 0.$$

Dieses Ergebnis bedeutet, dass das hier betrachtete Gravitationsfeld $\vec{F}$ bei $r \neq 0$ quellenfrei ist.

Aufgabe 19:

(a) Multiplizieren Sie die beiden folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie, dass für die beiden Matrizen aus (a) die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ verschieden voneinander sind.

Lösung:

$$\text{(a)} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Also ist $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Aufgabe 20: Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A^T.

Lösung:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 21: Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

die zu A inverse Matrix ist.

Lösung: Wenn B die zu A inverse Matrix sein soll, so muss gelten, dass $A \cdot B = E$. Es ist

$$A \cdot B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = E,$$

also gilt $B = A^{-1}$.

Aufgabe 22: Ermitteln Sie die inverse Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Determinante dieser Matrix berechnet sich aus $\det A = (-4) \cdot 7 - (-6) \cdot 8 = 20$. Somit ist die inverse Matrix gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23: Berechnen Sie die Determinanten von folgenden Matrizen

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) $\det A = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 3$

(b) Hier wendet man die Regel von Sarrus an und erhält $\det A = 0 - 15 + 4 - 0 + 8 - 6 = -9$.

Aufgabe 24: Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3\,x_3 & = & 4 \\ 23\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 13 \\ 11,5\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 6,5. \end{array}$$

Lösung: Die zweite und die dritte Gleichung sind linear abhängig. Folglich enthält die Lösung einen frei wählbaren Parameter x_3: Die Lösung ist

$$x_1 = \frac{21}{25} - \frac{2}{5}x_3, \qquad x_2 = -\frac{79}{25} + \frac{13}{5}x_3.$$

Aufgabe 25: Untersuchen Sie die folgenden homogenen Gleichungssysteme und lösen Sie sie, falls möglich:

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 1,5\,x_2 & + & 0,5\,x_3 & = & 0. \end{array}$$

Lösung:

(a) Die drei Gleichungen sind linear unabhängig. Es existiert also nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(b) Die erste und die dritte Gleichung sind linear abhängig. Man erhält

$$x_1 = -\frac{1}{20}x_3, \qquad x_2 = \frac{3}{10}x_3.$$