Mathematischer Vorkurs
Übungsblatt 3 (03.04.2012)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. Norbert Pietralla/Sommersemester 2012
c.v.meister@skmail.ikp.physik.tu-darmstadt.de

1. Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_0^{\pi/2} 3\cos(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \quad \int_0^{\pi} 3\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Berechnen Sie den Betrag der Fläche zwischen Graph und x-Achse:

$$\text{(a)} \quad \int_{-2}^{0} x - 2\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int_0^4 x - 2\,\mathrm{d}x.$$

3. Berechnen Sie den Inhalt der Flächen, die von den Kurven mit den angegebenen Gleichungen eingeschlossen werden:

$$\text{(a)} \quad f_1(x) = x^3 + 7, \quad f_2(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5, \qquad \text{(b)} \quad y_1 = \frac{1}{x}, \quad 3y_1 + 3x = 10,$$

$$\text{(c)} \quad y_1 = \cos(x), \quad y_2 = \sin(x) \quad \text{zwischen benachbarten Schnittpunkten.}$$

4. Berechnen Sie die Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int \cos(ax)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int 2\pi\sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \quad \int 2ax\,\mathrm{d}t, \qquad \text{(d)} \int \sin^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \qquad \text{(e)} \quad \int x^{7/3} + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

5. Lösen Sie mittels partieller Integration:

$$\text{(a)} \quad \int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. Lösen Sie durch Substitution:

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 (5x-4)^3\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{7-3x}}, \qquad \text{(c)} \quad \int_1^{3/2} \sin\left(\pi x + \frac{5\pi}{2}\right)\mathrm{d}x, \qquad \text{(d)} \quad \int_{-1}^{+1} x^2\sqrt{2x^3+4}\,\mathrm{d}x.$$

7. Lösen Sie folgende uneigentlichen Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}, \qquad \text{(b)} \quad \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^3}, \qquad \text{(c)} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

8. Welche der folgenden Differentialgleichungen gehören zur Klasse der linearen Differentialgleichungen 1. oder 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten?

$$\text{(a)} \quad y' + x^2 y = 2x, \qquad \text{(b)} \quad 5y'' - 2y' - 4x = 3y, \qquad \text{(c)} \quad y^{(4)} + 2y'' + 3y' = 0,$$

$$\text{(d)} \quad \sin(x)\cdot y'' - y = 0, \qquad \text{(e)} \quad y'' - x^5 = 2, \qquad \text{(f)} \quad 2y'' - y' + \frac{3}{2}y = 0.$$

9. Bestimmen Sie Typ (homogen - inhomogen) und Ordnung der folgenden Differentialgleichungen:

$$\text{(a)}\quad y'' + ax = 0, \qquad \text{(b)}\quad \frac{5}{4}y'' + \frac{2}{3}y' = \frac{1}{2}y, \qquad \text{(c)}\quad 2y' = 3y, \qquad \text{(d)}\quad \frac{3}{10}y'' + \frac{2}{5}y' + \frac{1}{6}y - \sin(x) = 0.$$

10. Die Differentialgleichung

$$\frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}y = 0$$

hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^{2x}.$$

Bestimmen Sie die Konstante C für die folgenden Randbedingungen:

$$\text{(a)}\quad y(0) = 0, \qquad \text{(b)}\quad y(0) = -2, \qquad \text{(c)}\quad y(-1) = 1, \qquad \text{(d)}\quad y'(-1) = 2e^{-2}.$$

11. Geben Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen 1. Ordnung an:

$$\text{(a)}\quad 2y' + 8y = 0, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{5}y' = 6y.$$

12. Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit Hilfe des Exponentialansatzes und geben Sie die allgemeine Lösung an:

$$2y'' - 12y' + 10y = 0.$$

13. Geben Sie die allgemeinen Lösungen der inhomogenen Differentialgleichungen an:

$$\text{(a)}\quad 7y'' - 4y' - 3y = 6, \qquad \text{(b)}\quad y'' - 10y' + 9y = 9x.$$

14. Zur folgenden Differentialgleichung sei eine spezielle Lösung $u(x)$ angegeben. Überprüfen Sie, dass $u(x)$ tatsächlich eine Lösung der DGL ist und geben Sie die allgemeine Lösung der DGL an. Die DGL und die spezielle Lösung lauten

$$\frac{1}{2}y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = \frac{3}{4}x^2 - 1, \qquad u(x) = \frac{3}{10}x^2 + \frac{18}{25}x + \frac{43}{125}.$$

15. Geben Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{2}y' + 2y = 0, \quad \text{Randbedingung: } y(0) = 3, \qquad \text{(b)}\quad \frac{4}{7}y' - \frac{6}{5}y = 0, \quad \text{Randbedingung: } y(10) = 1.$$

16. Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung:

$$y'' + y = 2y', \quad \text{Randbedingungen: } y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

17. Lösen Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\text{(a)}\quad y'' = 1 + y'^2, \qquad \text{(b)}\quad y'' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Hinweis: Benutzen Sie im Fall (a) die Substitution $z = y'$.