Mathematischer Vorkurs
Übungsblatt 5 (05.04.2012)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. Norbert Pietralla/Sommersemester 2012
c.v.meister@skmail.ikp.physik.tu-darmstadt.de

1. Berechnen Sie den Abstand $|\vec{d}\,|$ der Punkte P_1 und P_2:

$$\text{(a)}\quad P_1 = (3,2,0),\quad P_2 = (-1,4,2),\qquad \text{(b)}\quad P_1 = (-2,-1,3),\quad P_2 = (4,-2,-1).$$

2. Berechnen Sie den von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel.

$$\text{(a)}\quad \vec{a} = (1,-1,1),\quad \vec{b} = (-1,1,-1),\qquad \text{(b)}\quad \vec{a} = (-2,2,-1),\quad \vec{b} = (0,3,0).$$

3. Berechnen Sie $|\vec{a}\times\vec{b}\,|$:

$$\text{(a)}\quad |\vec{a}\,| = 2,\quad |\vec{b}\,| = 3,\quad \alpha = (\vec{a},\vec{b}) = 60^o,\qquad \text{(b)}\quad |\vec{a}\,| = \frac{1}{2},\quad |\vec{b}\,| = 4,\quad \alpha = (\vec{a},\vec{b}) = 0^o.$$

4. Welche dritte Koordinate x muss der Punkt $P_1(2,1,x)$ haben, damit er mit den Punkten $P_2(1,1,2)$, $P_3(-1,-1,4)$ und $P_4(2,-2,9)$ in einer Ebene liegt?

5. Untersuchen Sie, ob die Punkte (-11,11,-14) und (1,5,15) auf der Geraden $g:\ \vec{x} = (-5,7,6) + \lambda(3,-2,10)$ liegen.

6. Untersuchen Sie, ob sich die Geraden schneiden und geben Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt an:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & g_1:\ \vec{x} = (1,1,1) + \lambda(2,-1,3) \quad \text{und} \quad g_2:\ \vec{x} = (1,-1,-1) + \mu(-1,1,1), \\ \text{(b)} & g_1:\ \vec{x} = (1,1,1) + \lambda(2,-1,3) \quad \text{und} \quad g_2:\ \vec{x} = (1,-1,-1) + \mu(1,-1,1). \end{array}$$

7. Bestimmen Sie die Gleichungen der folgenden Ebenen:
(a) E_1 durch den Punkt $(0,1,2)$ und in Richtung der Vektoren $\vec{v} = (0,2,1)$ und $\vec{w} = (2,3,-5)$,
(b) E_2 durch die Punkte $(0,1,2)$, $(2,-3,4)$ und $(7,-9,-1)$,
(c) E_3 durch den Punkt $(0,1,2)$, E_3 besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = (0,2,1)$.

8. Untersuchen Sie, ob die Punkte $(1,3,-6)$ und $(5,-5,4)$ auf der folgenden Ebene liegen:

$$E:\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1.$$

9. Bestimmen Sie die Lage der folgenden Geraden zur Ebene $E:\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$:

(a) $g_1:\ \vec{x} = (1,1,1) + \lambda(-2,3,1)$, (b) $g_2:\ \vec{x} = (-1,1,1) + \lambda(-1,-1,1)$, (c) $g_3:\ \vec{x} = (3,-2,0) + \lambda(-1,-1,1)$.

10. Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen $E_1:\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ und $E_2:\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$.

11. Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ mit:

$$\text{(a)}\quad \vec{a} = (2,3,1),\quad \vec{b} = (-1,2,4),\qquad \text{(b)}\quad \vec{a} = (-2,1,0),\quad \vec{b} = (1,4,3).$$

12. Berechnen Sie den Gradienten folgender Skalarfelder:

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (b) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$, (c) $f(x,y,z) = a$, (c) $f(x,y,z) = x\ln(y) - z\ln(x)$.

13. Berechnen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder:

$$\text{(a)} \quad \vec{F} = (xe^{-y}, ye^{-x}), \qquad \text{(b)} \quad \vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y).$$

14. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y) = (xy^2,\ x^2y - 4y).$$

An welchen Punkten der xy-Ebene ist die Divergenz dieses Vektorfeldes Null?

15. Berechnen Sie von den Vektorfeldern $\vec{F}$ die Divergenz. Geben Sie an, wo Quellen und Senken liegen, bzw. wo das Feld quellen- und senkenfrei ist.

$$\text{(a)} \quad \vec{F}(x,y,z) = (x-a, y, z), \qquad \text{(b)} \quad \vec{F}(x,y,z) = (a, -x, z^2).$$

16. Sind die Vektorfelder wirbelfrei?

$$\text{(a)} \quad \vec{F}(x,y,z) = (a, x, b), \qquad \text{(b)} \quad \vec{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}.$$

17. Berechnen Sie $\vec{a} = \vec{\nabla} f$, sowie $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ (also Δf) mit $f(x,y,z) = x \cdot \sin(yz)$.

18. Berechnen Sie die Divergenz des Gravitationsfeldes der Erde, welches gegeben ist durch

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

19. (a) Multiplizieren Sie die beiden folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie, dasss für die beiden Matrizen aus (a) die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ verschieden voneinander sind.

20. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A^T.

21. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

die zu A inverse Matrix ist.

22. Ermitteln Sie die inverse Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

23. Berechnen Sie die Determinanten von folgenden Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

24. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3\,x_3 & = & 4 \\ 23\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 13 \\ 11{,}5\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 6{,}5. \end{array}$$

25. Untersuchen Sie die folgenden homogenen Gleichungssysteme und lösen Sie sie, falls möglich:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 1{,}5\,x_2 & + & 0{,}5\,x_3 & = & 0. \end{array}$